



## Contenidos

1. Derivada de la función constante
2. Derivada de una potencia
3. Derivada de la suma y la resta de funciones
  - 3.1 Derivada de la suma de funciones
  - 3.2 Derivada de la resta de funciones
4. Derivada del producto de dos funciones
5. Derivada del cociente de dos funciones
6. Derivada de funciones compuestas
7. Derivada de funciones trascendentes
  - 7.1 Derivada de las funciones logarítmicas
  - 7.2 Derivada de las funciones exponenciales
  - 7.3 Derivada de las funciones trigonométricas
8. Derivada de las funciones inversas
  - 8.1 Derivada de las funciones trigonométricas inversas
9. Derivación implícita
10. Derivadas de orden superior



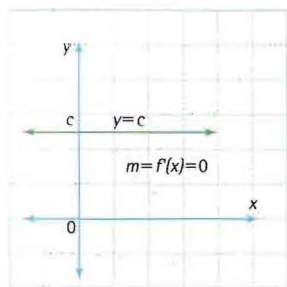


Figura 1

### Regla de la constante

La función constante  $f(x) = c$ , es una función cuya gráfica es la recta horizontal  $y = c$ . La pendiente de la recta que representa la función constante es cero (figura 1).

Así, se dice que:

*La derivada de la función constante  $f(x) = c$ , es  $f'(x) = 0$ .*

La definición anterior se puede justificar mediante la definición de derivada. Así,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Usando la notación de Leibniz, se puede escribir  $\frac{d}{dx}[c] = 0$

### Regla de la potencia

*La derivada de la función potencia  $f(x) = x^n$ , es*

$$f'(x) = nx^{n-1}, n \in \mathbb{Z} \text{ o } n \in \mathbb{Q}^+$$

A partir de la definición de derivada, se puede demostrar que si  $f(x) = x^n$ , entonces  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

Sea  $f(x) = x^n$ , entonces

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \left[ \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2} \right]h^2 + \dots + h^n - x^n}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \left( \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2} \right)h^2 + \dots + h^n}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left[ nx^{n-1} + \left( \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2} \right)h + \dots + h^{n-1} \right]}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + \left( \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2} \right)h + \dots + h^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} + 0 + \dots + 0 = nx^{n-1}$$

$$\text{Luego, } f'(x) = nx^{n-1}$$

## Ejemplos

1. Demostrar que si  $f(x) = x$ , entonces  $f'(x) = 1$ .

Solución

$$\text{Si } f(x) = x, \text{ entonces } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

Luego, si  $f(x) = x$ , entonces,  $f'(x) = 1$ .

2. Hallar la derivada de:

a.  $f(x) = x^3$       b.  $f(x) = x^7$       c.  $y = x^{1/4}$       d.  $y = x^{3/5}$

Solución

Aplicando la regla de la potencia, se tiene:

a.  $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

b.  $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

c.  $y = x^{1/4} \Rightarrow y' = \frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{1}{4x^{3/4}}$

d.  $y = x^{3/5} \Rightarrow y' = \frac{3}{5}x^{-2/5} = \frac{3}{5x^{2/5}}$

3. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a.  $f(x) = \frac{1}{x}$

b.  $g(x) = \sqrt{x}$

Solución

a.  $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

b.  $g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g(x) = x^{1/2} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

En general, si  $n$  es cualquier número real, se cumple que

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

### Regla del múltiplo constante

La derivada de una constante por otra función, es igual a la constante por la derivada de la función. Así,

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x).$$

La regla anterior se puede deducir a partir de la definición de derivada.

$$\text{Si } g(x) = cf(x) \Rightarrow g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} c \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x)$$

## Ejemplo

Hallar la derivada de las siguientes funciones. Luego, graficar la función y su derivada.

a.  $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

c.  $g(x) = \frac{1}{2}x^{-2}$

e.  $\frac{d}{dx}[-x^{1/2}]$

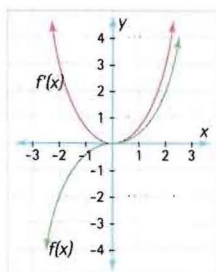
b.  $y = -x$

d.  $j(x) = \frac{3}{x^3}$

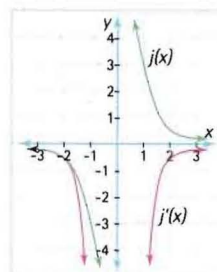
f.  $f(x) = -\frac{2}{5}x^{-1/2}$

Solución

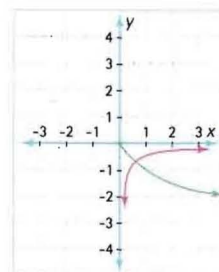
$$\begin{aligned} \text{a. } f(x) = \frac{1}{4}x^3 &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4} \frac{d}{dx}(x^3) \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}(3x^2) \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}x^2 \end{aligned}$$



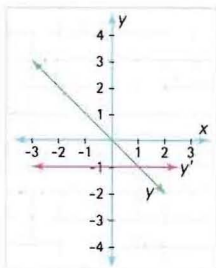
$$\begin{aligned} \text{d. } j(x) = \frac{3}{x^3} = 3x^{-3} &\Rightarrow j'(x) = 3(-3)x^{-4} \\ &\Rightarrow j'(x) = -9x^{-4} \\ &\Rightarrow j'(x) = -\frac{9}{x^4} \end{aligned}$$



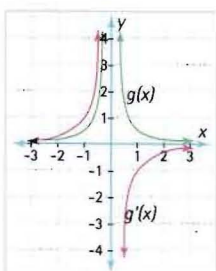
$$\begin{aligned} \text{e. } \frac{d}{dx}[-x^{1/2}] &= -\frac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2x^{1/2}} \end{aligned}$$



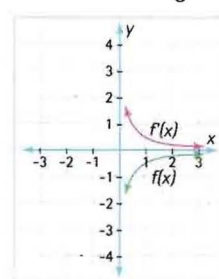
$$\begin{aligned} \text{b. } y = -x &\Rightarrow y' = (-1) \frac{d}{dx}(x) \\ &\Rightarrow y' = -1 \times 1 \\ &\Rightarrow y' = -1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{c. } g(x) = \frac{1}{2}x^{-2} &\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}(-2)x^{-3} \\ &\Rightarrow g'(x) = -x^{-3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{f. } f(x) = -\frac{2}{5}x^{-1/2} &\Rightarrow f'(x) = \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-1/2-1} \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5}x^{-3/2} = \frac{1}{5x^{3/2}} \end{aligned}$$



# Práctica 1

● INTERPRETATIVA ● PROPOSITIVA ● ARGUMENTATIVA

1. Indicar cuáles de las siguientes funciones tienen como derivada cero.

- |                          |                            |
|--------------------------|----------------------------|
| a. $f(x) = -4x$          | f. $f(x) = \sin x$         |
| b. $f(x) = 3$            | g. $f(x) = 0,001$          |
| c. $f(x) = \sqrt{2}$     | h. $f(x) = 6 + \sqrt{3}$   |
| d. $f(x) = 6x^2$         | i. $f(x) = 3x^3 + 5x + 1$  |
| e. $f(x) = -\frac{4}{3}$ | j. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ |

2. Demostrar que la derivada de cada una de las siguientes funciones es cero.

- |                          |                                    |
|--------------------------|------------------------------------|
| a. $f(x) = 9$            | g. $f(x) = -6$                     |
| b. $f(x) = \frac{2}{5}$  | h. $f(x) = \frac{2 + \sqrt{3}}{3}$ |
| c. $f(x) = -5$           | i. $f(x) = -15 + 0,01$             |
| d. $f(x) = 2\sqrt{2}$    | j. $f(x) = 2 + 7\sqrt{2}$          |
| e. $f(x) = 4 + \sqrt{3}$ | k. $f(x) = -6 + 2\sqrt{2}$         |
| f. $f(x) = \frac{1}{3}$  | l. $f(x) = \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$ |

3. Hallar  $\frac{dy}{dx}$  para cada función.

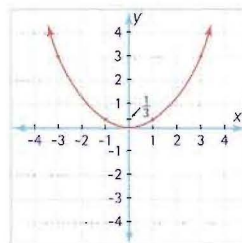
- |                                |                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| a. $f(x) = x^4$                | h. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$           |
| b. $f(x) = \frac{1}{x^2}$      | i. $f(x) = \frac{1}{x^3}$           |
| c. $f(x) = x^5$                | j. $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$           |
| d. $f(x) = \frac{1}{x^4}$      | k. $f(x) = \frac{1}{x^5}$           |
| e. $f(x) = x^6$                | l. $f(x) = \sqrt{x^4}$              |
| f. $f(x) = \frac{1}{x^6}$      | m. $f(x) = \frac{1}{x^7}$           |
| g. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | n. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$ |

4. Demostrar, usando la definición de límite, que la derivada de cada función es la que se escribe frente a ella.

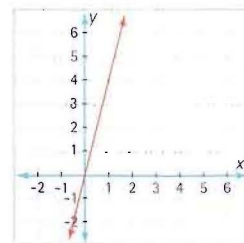
- |   |
|---|
| a. $f(x) = 5x^2$ , $f'(x) = 10x$                      |
| b. $f(x) = \frac{1}{3}x^4$ , $f'(x) = \frac{4}{3}x^3$ |
| c. $f(x) = -7x^3$ , $f'(x) = -21x^2$                  |
| d. $f(x) = \frac{3}{5}x^5$ , $f'(x) = 3x^4$           |
| e. $f(x) = -\frac{1}{2}x^6$ , $f'(x) = -3x^5$         |

5. Trazar la gráfica de la función derivada sobre el plano en el que está la gráfica de cada función.

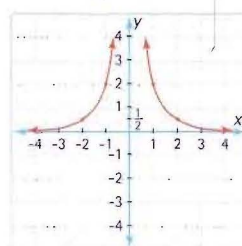
a.  $f(x) = \frac{1}{3}x^2$



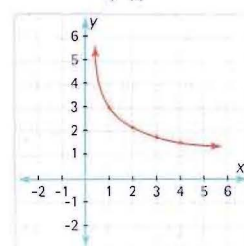
d.  $f(x) = 4x$



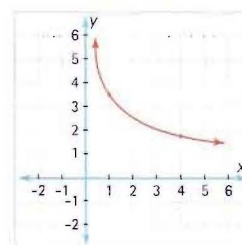
b.  $f(x) = \frac{2}{x^2}$



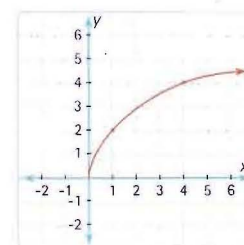
e.  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$



c.  $f(x) = \frac{7}{2\sqrt{x}}$



f.  $f(x) = 2\sqrt{x}$



6. Calcular la pendiente de la recta tangente a cada curva en el punto indicado.

- |                            |                                    |
|----------------------------|------------------------------------|
| a. $f(x) = 3x^2$           | en $P(1, 3)$                       |
| b. $f(x) = \frac{5}{2}x^3$ | en $P\left(2, \frac{5}{4}\right)$  |
| c. $f(x) = \frac{3}{x^3}$  | en $P(1, 3)$                       |
| d. $f(x) = \sqrt{x^3}$     | en $P(4, 8)$                       |
| e. $f(x) = \frac{3}{5x}$   | en $P\left(2, \frac{3}{10}\right)$ |
| f. $f(x) = \frac{6}{x^2}$  | en $P(1, 6)$                       |



### 3.1 DERIVADA DE LA SUMA DE FUNCIONES

La suma de dos funciones  $f$  y  $g$ , derivables, se puede obtener mediante la siguiente regla.

#### Regla de la suma

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos funciones derivables. La derivada de la suma de  $f(x)$  y  $g(x)$ , notada  $(f(x) + g(x))'$  es igual a la suma de la derivada de  $f(x)$  con la derivada de  $g(x)$ . Así:

$$\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} [f(x)] + \frac{d}{dx} [g(x)] \text{ o } (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

La regla de la suma se puede abreviar escribiendo simplemente  $(f + g)' = f' + g'$ .

La regla anterior se puede verificar usando la definición de derivada:

$$\begin{aligned} \text{Si } F(x) &= f(x) + g(x) \Rightarrow F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

#### Ejemplos

- Usar la regla de la suma para hallar la derivada de  $F(x) = x^2 + x$ .

Solución

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 + x \Rightarrow F'(x) = f'(x) + g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 2x + 1 \end{aligned}$$

Luego, la derivada de  $F(x) = x^2 + x$  es  $F'(x) = 2x + 1$ .

- Derivar.

a.  $f(x) = 3x^2 + 2x$

b.  $g(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{x}$

Solución

a.  $f(x) = 3x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = 6x + 2$

b.  $g(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

#### Regla de la suma

La regla de la suma se puede extender a la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, si  $f(x) = 2x^5 + 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ , entonces  $f'(x)$  es  $10x^4 + 9x^2 + 4x - 1$ .

### 3.2 DERIVADA DE LA RESTA DE FUNCIONES

La derivada de la resta de dos funciones se puede escribir como la suma de dos funciones. Así,

$$[f(x) - g(x)]' = [f(x) + (-g(x))]'$$

Luego, para calcular la derivada de la resta de dos funciones, se aplica la fórmula vista para calcular la derivada de la suma de dos funciones.

En consecuencia, se obtiene la siguiente regla.

#### Regla de la resta

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos funciones derivables. La derivada de la resta de  $f(x)$  y  $g(x)$ , notada  $(f(x) - g(x))'$  es igual a la suma de la derivada de  $f$  con el opuesto de la derivada de  $g$ . Así,

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \left[-\frac{d}{dx}[g(x)]\right] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)],$$

$$\text{o } (f(x) - g(x))' = f'(x) + (-g'(x)) = f'(x) - g'(x).$$

Estas reglas se pueden combinar con la regla de la potencia para derivar cualquier polinomio.

#### Ejemplo

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a.  $f(x) = x^7 + 5x^5 - 2x^3 + 4x$

c.  $g(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{12}{5\sqrt{x}}$

b.  $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{x} - x^{-1}$

d.  $\frac{d}{dx}[3x^3 - 2x^2 + x - 5]$

**Solución**

a.  $f(x) = x^7 + 5x^5 - 2x^3 + 4x \Rightarrow f'(x) = 7x^6 + 25x^4 - 6x^2 + 4$

b.  $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{x} - x^{-1} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{2}{2\sqrt{x}} + x^{-2}$   
 $\Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

c.  $g(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{12}{5\sqrt{x}} \Rightarrow g(x) = 4x^{-2} - \frac{12}{5}x^{-1/2} = -8x^{-3} + \frac{12}{10}x^{-3/2}$   
 $\Rightarrow g'(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{6}{5x^{3/2}}$

d.  $\frac{d}{dx}[3x^3 - 2x^2 + x - 5] = \frac{d}{dx}(3x^3) - \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(5)$   
 $\Rightarrow \frac{d}{dx}[3x^3 - 2x^2 + x - 5] = 9x^2 - 4x + 1$

1. Hallar  $\frac{dy}{dx}$  para cada una de las funciones.

a.  $f(x) = 4 + 5x + x^2$

b.  $f(x) = 2 + 6x^3 + 4x$

c.  $f(x) = \frac{1}{4}x + 7x^2 + x^3 + x^4$

d.  $f(x) = \sqrt{x} + x$

e.  $f(x) = \frac{1}{x} + x^4$

f.  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + 2x^3 + 2$

g.  $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^2 + 1$

h.  $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + 5x + 6$

i.  $f(x) = \frac{2\sqrt{5x}}{3} + x^2$

j.  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x$

k.  $f(x) = \frac{6}{x^2} + 3x^6$

l.  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \sqrt{x}$

2. Demostrar, usando límites, que la derivada de cada función es la que está indicada frente a ella.

a.  $f(x) = 3x + 2$  ;  $f'(x) = 3$

b.  $f(x) = 9x^2 + 5x + 1$  ;  $f'(x) = 18x + 5$

c.  $f(x) = 4x^3 - 2x + 6$  ;  $f'(x) = 12x^2 - 2$

d.  $f(x) = \frac{1}{2}x + x^4$  ;  $f'(x) = \frac{1}{2} + 4x^3$

e.  $f(x) = 8x + 7x^3 + 3$  ;  $f'(x) = 8 + 21x^2$

f.  $f(x) = 6x^3 + 2x^2 + 5$  ;  $f'(x) = 18x^2 + 4x$

g.  $f(x) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{5}x^3 + 6x^2$  ;  $f'(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{9}{5}x^2 + 12x$

h.  $f(x) = \sqrt{x} - 2x^4$  ;  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 8x^3$

3. Determinar cuáles funciones no están derivadas correctamente. Justificar la respuesta. Calcular correctamente la derivada.

a.  $f(x) = 4x^2 + 5x + \frac{1}{x^2} + 6$

$\frac{dy}{dx} = 8x + 5 + \frac{1}{2x^3} + 1$

b.  $f(x) = 3x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 5x^5$

$\frac{dy}{dx} = 6x + 12x^2 + 28x^3 + 25x^4$

c.  $f(x) = 7x - 3\sqrt{x} + 6$

$\frac{dy}{dx} = 7 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$

d.  $f(x) = \frac{9}{x^5} + \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{45}{x^6} - \frac{12}{x^4} - \frac{10}{x^3}$

4. Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = 4 + x$

$g(x) = x^2 + 5x + 1$

$h(x) = 3x^3 + 12$

hallar:

a.  $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x))$

e.  $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x) + h(x))$

b.  $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x))$

f.  $\frac{d}{dx}(f(x) - h(x) + g(x))$

c.  $\frac{d}{dx}(g(x) + h(x))$

g.  $\frac{d}{dx}(g(x) - f(x) - h(x))$

d.  $\frac{d}{dx}(h(x) - f(x))$

h.  $\frac{d}{dx}(h(x) + f(x) - g(x))$

5. Una pelota rueda sobre un plano inclinado de forma que la distancia que recorre al cabo de 3 segundos está dada por la función

$s(t) = 2t^3 + 3t^2 + 4$

donde  $s$  se mide en centímetros y  $t$  se mide en segundos.

a. Hallar la velocidad de la pelota en  $t = 2$  segundos.

b. Determinar el momento en el cual la pelota llega a una velocidad de 30 cm/s.

6. Se deja caer una pelota desde lo alto de un edificio hasta el suelo. La altura de la pelota, arriba del suelo, está dada como función del tiempo  $t$  en segundos por:

$y = 1.250 - 10t^2$

donde  $y$  es la altura, medida en centímetros, de la pelota al suelo.

a. Hallar la velocidad de la pelota para un tiempo  $t$ .

b. ¿Cuál es el signo de la velocidad?

c. ¿Qué significado tiene el signo de la velocidad?

d. En  $t = 2$ , ¿cuál es la distancia de la pelota al suelo?



## DERIVADA DEL PRODUCTO DE DOS FUNCIONES

### Regla del producto

#### Historia de las matemáticas

La fórmula del producto fue descubierta por Leibniz hace tres siglos, después de suponer erróneamente que la derivada de un producto era el producto de las derivadas.

El siguiente ejemplo muestra la falsedad de la suposición de Leibniz:

$$f(x) = x^2, g(x) = x^3$$

Entonces, por la regla de la potencia

$$f'(x) = 2x \text{ y } g'(x) = 3x^2$$

Pero  $f(x) \cdot g(x) = x^5$

$$\text{y } [f(x) \cdot g(x)]' = 5x^4$$

que es diferente a

$$f'(x) \cdot g'(x) = 6x^3.$$

La derivada del producto de dos funciones derivables es igual a la primera función por la derivada de la segunda función, más la segunda función por la derivada de la primera función.

$$\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\text{o } [f(x) \cdot g(x)]' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Usando la definición de derivada, se puede verificar la regla anterior, así:

$$F(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Para poder calcular el límite, se resta y se suma la expresión  $f(x+h)g(x)$  al numerador. Así,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ f(x+h) \left( \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) + g(x) \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \right]$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$F'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

#### Ejemplo

Usar la regla del producto para hallar la derivada de cada expresión.

a.  $f(x) = (x^2 + 1)(2x^2 + 8x - 5)$       b.  $g(x) = (-2x^2 + 3x - 8) \cdot (\sqrt{x} + 2x)$

Solución

a.  $f'(x) = (x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx} (2x^2 + 8x - 5) + (2x^2 + 8x - 5) \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 1)$

$$= (x^2 + 1) \cdot (4x + 8) + (2x^2 + 8x - 5)(2x)$$

$$= 4x^3 + 8x^2 + 4x + 8 + 4x^3 + 16x^2 - 10x = 8x^3 + 24x^2 - 6x + 8$$

b.  $g'(x) = (-2x^2 + 3x - 8) \cdot \frac{d}{dx} (\sqrt{x} + 2x) + (\sqrt{x} + 2x) \cdot \frac{d}{dx} (-2x^2 + 3x - 8)$

$$= (-2x^2 + 3x - 8) \cdot \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \right) + (\sqrt{x} + 2x)(-4x + 3)$$

$$= -\frac{2x^2}{2\sqrt{x}} - 4x^2 + \frac{3x}{2\sqrt{x}} + 6x - \frac{8}{2\sqrt{x}} - 16 - 4x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 8x^2 + 6x$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (-2x^2 + 3x - 8) + \sqrt{x} (3 - 4x) - 12x^2 + 12x - 16$$

La regla del producto se puede extender al producto de tres o más funciones. Así, si  $f$ ,  $g$  y  $h$  son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)] = f(x) g(x) h'(x) + f(x) h(x) g'(x) + g(x) h(x) f'(x)$$

### Ejemplo

Para cada función, hallar  $y'$  de dos formas.

- Multiplicando los factores, y luego, derivando el resultado.
- Usando la regla del producto.

a.  $f(x) = (2x)(-5x^2)\left(\frac{2}{5}x^3\right)$

c.  $y = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$

b.  $y = (3x^2)(2x - 5)(x - 8)$

d.  $f(x) = (x^2 + x - 1)(x + 3)(8x)$

Solución

a.  $f(x) = (2x)(-5x^2)\left(\frac{2}{5}x^3\right)$

- Multiplicando los factores:  $f(x) = -4x^6$

Derivando el resultado:  $f'(x) = -24x^5$

- Usando la regla del producto:

$$f'(x) = (2x)(-5x^2)\left(\frac{6}{5}x^2\right) + (2x)\left(\frac{2}{5}x^3\right)(-10x) + (-5x^2)\left(\frac{2}{5}x^3\right)(2)$$

$$f'(x) = -12x^5 - 8x^5 - 4x^5 = -24x^5$$

b.  $y = (3x^2)(2x - 5)(x - 8)$

- Multiplicando los factores:  $y = 6x^4 - 63x^3 + 120x^2$

Derivando el resultado:  $y' = 24x^3 - 189x^2 + 240x$

- Usando la regla del producto:

$$y' = 3x^2(2x - 5)(1) + 3x^2(x + 8)(2) + (2x - 5)(x + 8)(6x)$$

$$y' = 6x^3 - 15x^2 + 6x^3 - 48x^2 + 12x^3 - 126x^2 + 240x$$

$$y' = 24x^3 - 189x^2 + 240x$$

c.  $y = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$

- Multiplicando los factores:  $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Derivando el resultado:  $y' = 3x^2 + 4x - 5$

- Usando la regla del producto:

$$y' = (x + 1)(x - 2)(1) + (x + 1)(x + 3)(1) + (x - 2)(x + 3)(1)$$

$$y' = x^2 - x - 2 + x^2 + 4x + 3 + x^2 + x - 6 = 3x^2 + 4x - 5$$

d.  $y = (x^2 + x - 1)(x + 3)(8x)$

- Multiplicando los factores:  $y = 8x^4 + 32x^3 + 16x^2 - 24x$

Derivando el resultado:  $y' = 32x^3 + 96x^2 + 32x - 24$

- Usando la regla del producto:

$$y' = (x^2 + x - 1)(x + 3)(8) + (x^2 + x - 1)(8x)(1) + (x + 3)(8x)(2x + 1)$$

$$y' = 8x^3 + 32x^2 + 16x - 24 + 8x^3 + 8x^2 - 8x + 16x^3 + 56x^2 + 24x$$

$$y' = 32x^3 + 96x^2 + 32x - 24$$

### Regla del cociente

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones derivables. La derivada del cociente entre  $f$  y  $g$  notado  $\frac{f}{g}$  es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \cdot \frac{d}{dx} [f(x)] - f(x) \cdot \frac{d}{dx} [g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Otra forma de verificar la regla del cociente es a partir de la regla del producto. Así,

si  $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , se puede

escribir  $f(x) = F(x) g(x)$ .

Luego, al aplicar la regla del producto, resulta  $f'(x) = F(x) g'(x) + g(x) F'(x)$ . Despejando  $F'(x)$ , resulta la regla deseada.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{f'(x) - F(x) g'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)} g'(x)}{g(x)} \\ F'(x) &= \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

Usando la definición de derivada, se puede verificar la regla anterior. Así,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) f(x+h) - f(x) g(x+h)}{h g(x+h) g(x)} \end{aligned}$$

Para poder calcular el límite, se resta y se suma la expresión  $g(x) f(x)$  al numerador. Así,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) f(x+h) - g(x) f(x) + g(x) f(x) - f(x) g(x+h)}{h g(x+h) g(x)}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) [f(x+h) - f(x)] - f(x) [g(x+h) - g(x)]}{h g(x+h) g(x)}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] - f(x) \left[ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]}{g(x+h) g(x)}$$

$$F'(x) = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} [g(x+h) g(x)]}$$

$$F'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

La regla del cociente se puede combinar con las otras reglas de derivación para calcular la derivada de cualquier función racional.

Por ejemplo, si  $f(x) = 3x + 1$  y  $g(x) = 2x - 5$ . La función cociente  $\frac{f(x)}{g(x)}$  es  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+1}{2x-5}$ , y su derivada se puede calcular aplicando la definición anterior.



## Ejemplos

1. Usar la regla del cociente para hallar la derivada de la función racional

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^3 + 8}.$$

Solución

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^3 + 8) \frac{d}{dx} [2x^2 - x + 1] - (2x^2 - x + 1) \frac{d}{dx} [x^3 + 8]}{(x^3 + 8)^2} \\ &= \frac{(x^3 + 8)(4x - 1) - (2x^2 - x + 1)(3x^2)}{(x^3 + 8)^2} \\ &= \frac{(4x^4 - x^3 + 32x - 8) - (6x^4 - 3x^3 + 3x^2)}{(x^3 + 8)^2} = \frac{-2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 32x - 8}{(x^3 + 8)^2} \end{aligned}$$

2. Hallar la derivada de la función racional  $f(x) = \frac{2x - 3}{3x + 4}$  en el punto de abscisa  $x = -1$ .

Solución

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x - 3}{3x + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x + 4)(2) - (2x - 3)(3)}{(3x + 4)^2} = \frac{6x + 8 - 6x + 9}{(3x + 4)^2} \\ &= \frac{17}{(3x + 4)^2} \end{aligned}$$

Luego, la derivada de la función racional  $f(x) = \frac{2x - 3}{3x + 4}$  en el punto de abscisa

$$x = -1, \text{ es } f'(-1) = \frac{17}{(3x + 4)^2} = \frac{17}{(3(-1) + 4)^2} = \frac{17}{1} = 17$$

Geométricamente, el valor 17 es la pendiente de la recta tangente a la curva  $\frac{2x - 3}{3x + 4}$  en el punto de abscisa  $x = -1$ . La función se observa en la figura 1.

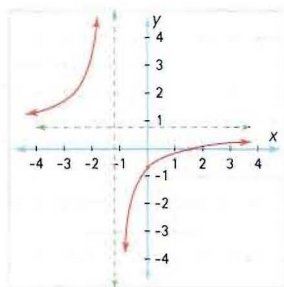


Figura 1

3. Dada la función  $y = \frac{2}{1 - x}$ , hallar:

- La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa  $x = 2$ .
- La ecuación de la recta normal a la curva.

Solución

- Se aplica la regla del cociente para hallar la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = \frac{2}{1 - x}$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .

$$y' = \frac{(1 - x) \cdot 0 - 2(-1)}{(1 - x)^2} = \frac{2}{(1 - x)^2} \Rightarrow y'(2) = \frac{2}{1} = 2$$

Luego, la ecuación de la recta tangente a la curva es:

$$y + 2 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 6$$

- La ecuación de la recta normal a la curva es

$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 2) = -\frac{1}{2}x - 1$$

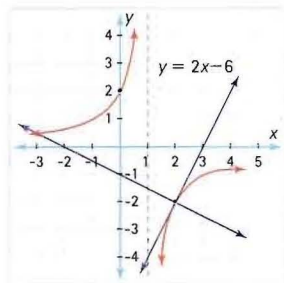


Figura 2